ومنه نستنتج أنه حسب ملاحظة سابقة أن C زمرة جزئية من S

المحاضرة (٤)

مبرهنة: (دورة)

إذا كانت نصف زمرة S غير خالية و تقسيم كل من عناصرها يميناً ويساراً، ويقبل نفس الرتبة القسمة يميناً ويساراً على كل عنصر من عناصرها فإن S زمرة

البرهان:

ليكن a,b من S فإنه يوجد x_0, x_1, y_0, y_1 في S بحيث يكون:

$a = x_0 g$ (g يقسم a من اليسار) ، $a = g y_1$ (g يقسم a من اليمين) ، $g = x_1 b$ (وتقبل القسمة على b من اليسار) ، $g = b y_0$ (وتقبل القسمة على b من اليمين)

وبالتالي فإن:

$a = x_0 g = x_0 (x_1 b) = (x_0 x_1) b$ أي أن $x = x_0 x_1$ هو الحل للمعادلة $a = xb$

$a = g y_1 = (b y_0) y_1 = b (y_0 y_1)$ هو الحل للمعادلة $a = by$ ، $y = y_0 y_1$

وهذا يكافئ:

$S = Sb \quad ; \forall b \in S$

$S = bS \quad ; \forall b \in S$

وحسب ملاحظة سابقة فإن S زمرة.

مثال: (دورة) (٢٠١٥ - ٢٠١٦)

لتكن G_1 ، G_2 زمرتين بحيث أن $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ولتكن $S = G_1 \cup G_2$

ولنعرف عملية تشكيل داخلية على S كما يلي:

لتكن $a,b \in S$ فإذا كانت a,b من زمرة واحدة (من G_1 أو G_2) فإن ناتج ab هو ضربهما في زمرتهما ، أما إذا كانت $a \in G_1$ ، $b \in G_2$ فإن $ab = ba = b$

لنثبت أن S نصف زمرة ؟؟

الحل:

1- إذا كانت $a,b,c \in G_1$ أو ($a,b,c \in G_2$) فإن $a(bc) = (ab)c$ لأن كلاً من G_1 و G_2 زمرة

2- إذا كانت $a,b \in G_1$ ، $c \in G_2$ فإن:

$a(bc) = ac = c$

$(ab)c = c$

Subject :

3- إذا كان $a,b \in G_1$ و $c \in G_1$:

$(ab)c = ab$ $\qquad$ $a(bc) = ab$

4- إذا كان $b,c \in G_1$ و $a \in G_1$:

$(ab)c = ac = a$ $\qquad$ $a(bc) = a$

5- إذا كان $b,c \in G_1$ و $a \in G_1$:

$(ab)c = bc$ $\qquad$ $a(bc) = bc$

6- إذا كان $a,c \in G_1$ و $b \in G_1$:

$(ab)c = bc = b$ $\qquad$ $a(bc) = ab = b$

7- إذا كان $a,c \in G_1$ و $b \in G_1$:

$(ab)c = ac$ $\qquad$ $a(bc) = ac$

أي أن الخاصية التجميعية متحققة على S وبالتالي فإن S تشكل زمرة لجميع الحالات
إضافة إلى ذلك فإنه:

$\forall a \in G_1$ فإنه :

$aS = a(G_0 \cup G_1) = aG_0 \cup aG_1$

$= G_0 \cup G_1 = S$

$\Rightarrow$

$Sa = (G_0 \cup G_1)a = G_0a \cup G_1a = G_0 \cup G_1 = S$

مجموعة تقاسيم عناصر S هي G_1 أي أن $B = G_1$

وأيضاً مهما يكن $b \in G_1$ فإنه يوجد $a \in S$ فإنه يوجد $x,y \in S$ بحيث أن

$ax = b$, $ay = b$ وذلك لأنه

إذا كانت $a \in G_1$ فإن المعادلتين السابقتين حل في G_1 وذلك لأن

(G_1 زمرة $\Leftrightarrow$ $\forall a \in G_1$; $aG_1 = G_1a = G_1$)

أما إذا كانت $a \in G_1$ فيوجد حل هو $x = y = b$

منه كلتا الحالتين يوجد حل وبالتالي نجد جميع عناصر G_1 تحقق الشرط على أن عناصر S أي أن

$G_1 = C$

تعريف:

ليكن (S, .) و (S', .) نصفي زمرتين ولتكن $\varphi : S \to S'$ تطبيقاً من S إلى S'

فإننا ندعو φ هومومورفيزماً إذا حقق الشرط:

$$\forall x,y \in S ;\quad \varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

ومثلاً ما نكتب اختصاراً:

$$\forall x,y \in S ;\quad \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

إذا كان φ متبايناً ندعوه مونومورفيزماً

إذا كان φ تقابلاً ندعوه ايزومورفيزماً

وإذا كان $S = S'$ فإن الهومومورفيزم يدعى اندومورفيزم

وإذا كان φ تقابلاً و $S = S'$ ندعوه اوتومورفيزم

ونقول أن S و S' هومومورفيتان إذا وجد بينهما هومومورفيزماً

ونقول أن S و S' ايزومورفيتان إذا وجد بينهما ايزومورفيزماً

تمرين: دورة هام

أثبت أنه إذا كانت S نصف زمرة و φ هومومورفيزماً من S إلى نصف الزمرة S' فإن $\varphi(S)$ هو نصف زمرة جزئية من S'.

الحل

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن $\varphi(S)$ مغلقة

$$\forall a,b \in \varphi(S) \Rightarrow \exists\, x,y \in S ;\ \varphi(x) = a ,\ \varphi(y) = b$$

$$a.b = \varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x.y) \in \varphi(S) \Rightarrow$$

$\varphi(S)$ نصف زمرة جزئية من S'

مثال:

لتكن M مجموعة ما غير خالية ولتكن S مجموعة جزئية من $P(M)$ حيث [$P(M)$ مجموعة أجزاء المجموعة M] بحيث أن:

$$\forall A,B \in S ;\ A \cap B \in S$$

إن $(S, \cap)$ نصف زمرة تبديلية لأن عملية التقاطع تجميعية وتبديلية وكل عنصر من عناصرها هو متعامد ذاتياً (لأن $A^2 = A \cap A = A$) ومنه فإن S نصف زمرة خاصة

مبرهنة

إن أي عصبة تبديلية E ايزومورفية مع نصف زمرة S حيث $S \subseteq P(E)$

مكونة من المجموعات الجزئية المغلقة

البرهان:

لنفرض أن $A_e \subseteq E$ مجموعة كل العناصر من E التي تقبل القسمة يساراً ويميناً على العنصر $e \in E$

أي أن: $A_e = eE \cap Ee = eE$ (لأن E تبديلية)

إذا كانت $f \in E$ فإن $A_{ef} = A_e \cap A_f$ وذلك لأن:

$x \in A_{ef} \Rightarrow x \in efE \Rightarrow \exists a \in E \; ; \; x = efa = e(fa) \in eE = A_e$

$\& \; x = f(ea) \in fE = A_f$

$x \in A_e \cap A_f \Rightarrow A_{ef} \subseteq A_e \cap A_f$

كما أن $A_e \cap A_f \subseteq A_{ef}$ وذلك لأن

$x \in A_e \cap A_f \Rightarrow x \in A_e \; \& \; x \in A_f \Rightarrow x \in eE \; \& \; x \in fE$

$\Rightarrow \exists a, b \in E \; ; \; x = ea \; \& \; x = fb$

ومنه: $x = x^2 = x \cdot x = (ae)(fb) = (ef)(\underset{\in E}{ab}) \in efE = A_{ef}$

ومنه نستنتج المساواة $A_{ef} = A_e \cap A_f$

- لتكن $S = \{A_e \subseteq E \; ; \; e \in E\}$

فتكون $(S, \cap)$ نصف زمرة تبديلية (لأنها مغلقة وتجميعية) وعناصرها كلها جامدة

لنعرف التطبيق $\varphi : E \longrightarrow S$

$e \longmapsto A_e$

إن φ هومومورفيزم لأنه

$\forall e, f \in E \; ; \; \varphi(ef) = A_{ef} = A_e \cap A_f = \varphi(e) \cap \varphi(f)$

كذلك فإن φ متباين لأنه:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(e) = \varphi(f) \Rightarrow A_e = A_f \\ e = e^2 = ee \in eE = A_e \\ f = f^2 = ff \in fE = A_f \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$e \in A_e = A_f = fE \Rightarrow \exists x \in E \; ; \; e = fx$

$f \in A_f = A_e = eE \Rightarrow \exists y \in E \; ; \; f = ey$

$e = fx = eyx = fxyx = fx'y = fxy = ey = f$

أي أن φ متباين

لما تكن $A \in S \Leftarrow$ حسب التعريف $\exists\, e \in E \,;\, A = Ae \Leftarrow$

يوجد $e \in E$ بحيث أن: $\varphi(e) = Ae = A$

أي أنه φ غامر وبالتالي فإنه φ ايزومورفيزم [أي أنه E و S ايزومورفيان].